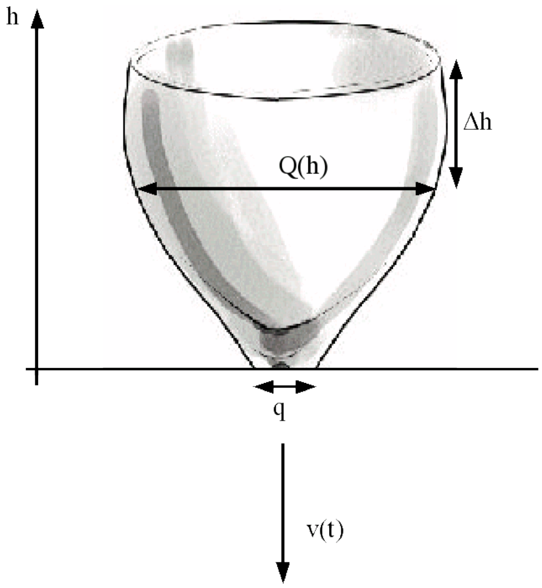
Ausflusszeit

(Dauer der Ausflusszeit und Integral)

Beispiel:

Aus einem (unregelmäßig geformten) Körper fließt am unteren Ende durch eine Öffnung mit der Querschnitssfläche q eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit v(t) aus.

Wie lange dauert es, wenn sich die Höhe des Flüssigkeitsstandes um die Differenz Δh von h_0 auf h_1 verändert[1]?



Beachte: q und Q sind Querschnittsflächen.
Während q gleichbleibt, ändert sich Q mit der Höhe.
Die Ausfluss-geschwindigkeit v(t) ändert sich ebenfalls mit der Zeit!

Physikalische Vorkenntnisse: Die Fallgeschwindigkeit (im Vakuum, siehe Fußnote 1) lässt sich durch $v(t)=\sqrt{2\cdot g\cdot h(t)}$ berechnen[2]. Die Menge des Ausflusses unten lässt sich durch berechnen. Die gleiche Menge geht oben als Schwund verloren: $\Delta V=Q(h)\cdot\Delta h$

Denk nach und begründe!

Durch Gleichsetzen erhält man:

$$q\cdot v(t)\cdot\Delta t=Q(h)\cdot\Delta h$$

und somit:

$$\Delta t=\frac{1}{q\cdot v(t)}\cdot Q(h)\cdot\Delta h=$$
$$=\frac{1}{q\cdot\sqrt{2g}}\cdot Q(h)\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}\cdot\Delta h$$

Durch Aufsummierung und Grenzübergang Δh gegen null erhält man:

$$t=\frac{1}{q\cdot\sqrt{2g}}\cdot\int_{h_0}^{h_1}Q(h)\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}dh$$

Berechne die Zeit bis die Flüssigkeit aus dem in der Abbildung dargestellten Gefäß ausgeflossen ist!

Wir vermessen das Gefäß, indem wir in 0,5 cm Schritten den Durchmesser abmessen[3]. Im Data-/Matrix-Editor geben wir die Werte ein (c1 und c2), rechnen in m um (c3 und c4), bestimmen Q(c5) und für jeden Wert das Zeitintervall Δt (c6):

F1 | F2 Plot Setup | F3 Cell | F4 Header | F5 Calc | F6 Util | F7 Stat

DATA	h(cm)	d(cm)	h(m)	r(m)	Q	Δt
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
2	.5	1.5	.005	.0075	2.E-4	.0556
3	1.	2.3	.01	.0115	4.E-4	.0924
4	1.5	3.1	.015	.0155	8.E-4	.1371
5	2.	3.7	.02	.0185	.0011	.1691
6	2.5	4	.025	1/50	π/25...	.1768
7	3.	4.3	.03	.0215	.0015	.1865
8	3.5	4.2	.035	.021	.0014	.1647

r8c6=.16471744272389

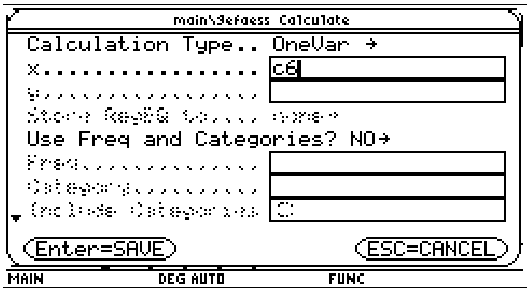
MAIN DEG AUTO FUNC

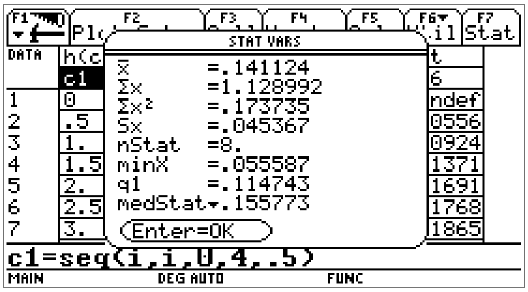
1 Die Zähigkeit der Flüssigkeit, die Reibung an den Gefäßwänden und die Tatsache, dass beim Ausfließen potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt wird, wird hier einmal vernachlässigt. Tatsächlich spielen diese „Nebeneffekte" in realen Situationen je nach Gefäßform und Flüssigkeit möglicherweise eine entscheidende Rolle...

2 g = Erdbeschleunigung, $g\approx 10\ m\cdot s^{-2}$

3 Dazu nehmen wir den in der Abbildung dargestellten Umriss als Seitenriss des Gefäßes, Maßstab 1:1!

Anschließend bestimmen wir die Summe aller Zeitintervalle aus der Spalte c6 durch <F5 Calc>:

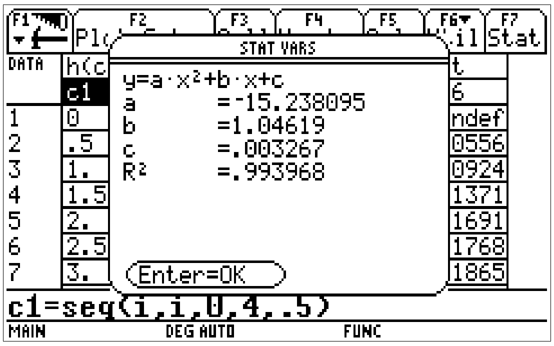




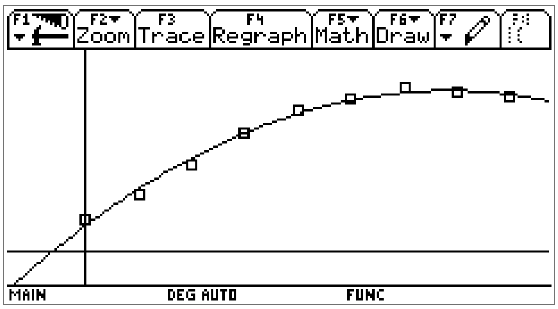
Neben der Summe lesen wir ab: Es dauert etwas mehr als 1 Sekunde, bis die Flüssigkeit ausgeflossen ist!

Zweite Möglichkeit: Von den Werten wird mittels Regressionsrechnung ein Funktionsterm bestimmt:

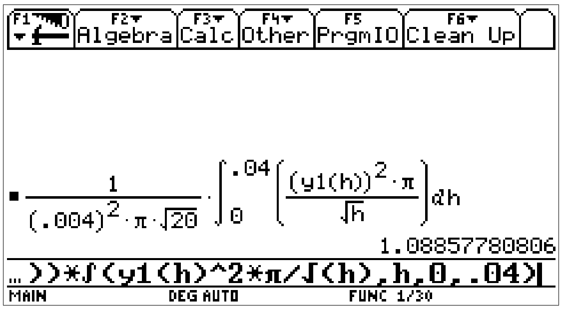
Dazu verwenden wir die Spalte c3 (Höhe) und die Spalte c4 (Radius) und speichern den Term in y1(x)!



Im Grafikscreen kontrollieren wir mittels Plot und Graph:



Im Homescreen rechnen wir mit dem Integral:

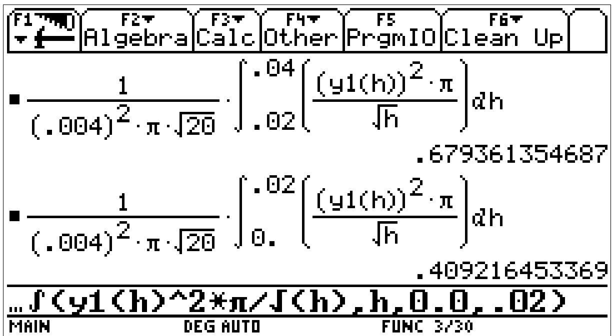


Antwort: Es dauert etwas mehr als 1 Sekunde, bis die Flüssigkeit ausgeflossen ist!

Hinweis: Warum ist der „exakte" Wert etwas kleiner als der durch die Summenbildung gewonnene?

Zusatzbeispiele:

1. Wie lange dauert es, bis die Flüssigkeit halb hoch steht?
2. Wie lange dauert es dann noch, bis die Flüssigkeit ganz ausgeflossen ist?
3. Wodurch kann man das Näherungsergebnis verbessern?



Lösung für 1. und 2. Aufgabe