Flächenbestimmungen

(Fläche und Integral)

Beispiel: Unter dem Funktionsgraphen von $f(x)=-\frac{x^2-14\cdot x+17}{4}$ soll im Intervall [2; 6] das Flächenstück berechnet werden, das zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse liegt!

Vorbereitungen: Aus dem Ergebnis des „näherungsweisen" Intergrierens erhalten wir:

$$F(x)-F(x_0)\approx\sum_{i=0}^{n-1} f(x_0+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

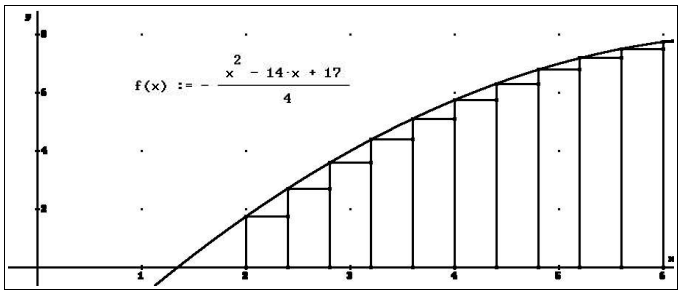
$$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$$also:\sum_{i=0}^{n-1} f(x_0+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\approx\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

Hinweis: F(x) ist Stammfunkion von f(x)

Mit anderen Worten: Summen der obigen Gestalt lassen sich (nächerungsweise) mit Hilfe des bestimmten Integrals berechnen.

Wir berechnen die im Beispiel bezeichnete Fläche mit Hilfe von gleich breiten Rechtecksflächen, die zur Gänze unter dem Funktionsgraphen liegen[1] (der linke obere Eckpunkt liegt auf dem Funktionsgraphen):



Die Abbildung zeigt 10 Rechtecksstreifen. Mit dem Voyage berechnen wir die Summe der Flächen:

$\frac{-(x^2-14\cdot x+17)}{4}\to f(x)$ Done

$\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{f(2+4/10\cdot i)\cdot 4}{10}\right)$ 20.44

Der Wert 20,44 wird etwas kleiner sein, als der gesuchte Flächeninhalt! **Warum?** Für die Verbesserung des Näherungswertes teilen wir das Intervall [2; 6] in 100 Streifen und rechnen wieder:

$\sum_{i=0}^{99}\left(\frac{f\left(2+\frac{4}{100}\cdot i\right)\cdot 4}{100}\right)$ 21.55

Bei 1000 Streifen:

$\sum_{i=0}^{999}\left(\frac{f\left(2+\frac{4}{1000}\cdot i\right)\cdot 4}{1000}\right)$ 21.65

Wir führen schließlich eine Grenzwertberechnung für „unendlich" viele Rechtecksstreifen durch ...

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{f\left(2+\frac{4}{n}\cdot i\right)\cdot 4}{n}\right)$ 21.67

... und vergleichen mit dem bestimmten Integral:

$\int_2^6 f(x)dx$ 21.67

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei f im Intervall [a; b] stetig und F irgendeine Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

Wir rechnen das obige Beispiel noch einmal näherungsweise mit einer „Obersumme" ...

$\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{f(2+4/10\cdot i)\cdot 4}{10}\right)$ 22.84

$\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{f\left(2+\frac{4}{100}\cdot i\right)\cdot 4}{100}\right)$ 21.79

$\sum_{i=1}^{1000}\left(\frac{f\left(2+\frac{4}{1000}\cdot i\right)\cdot 4}{1000}\right)$ 21.68

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f\left(2+\frac{4}{n}\cdot i\right)\cdot 4}{n}\right)$ 21.67

... und erhalten das gleiche Ergebnis!

1 Man bezeichnet diese Näherung als „Untersumme"