

(Näherungsweise) Integrieren

(Summe und Integral)



Beispiel: Ein Auto bewegt sich mit

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 12,$$

$$s(0) = 0 \text{ m}$$

Berechne die Ortsfunktion $s(t)$ **schrittweise, näherungsweise** unter Verwendung der jeweiligen momentanen Geschwindigkeit (= Änderungsrate)!

Vorbereitungen: Da der Sequence - Mode am Voyage nur für ganzzahlige Schrittweiten möglich ist (0, 1, 2, 3, ...), verwenden wir als Zeiteinheit Zehntelsekunden. Wir definieren daher eine „gezoomte“ Geschwindigkeitsfunktion $w(t)$ und ändern damit die Zeiteinheit im Sequencemodus auf Zehntelsekunden:

$$v\left(\frac{t}{10}\right) \rightarrow w(t)$$

$$w(t) = 0.3 \cdot t^2 - 1.2 \cdot t + 12.$$

Zur Darstellung von Funktionen im Sequence-Modus verwenden wir die Ausgabe von Daten aus dem Data/Matrix Editor mit Hilfe von Plot:

<APPS>, [Data/Matrix Editor], [New], ...,

Als erstes generieren wir mit dem seq-Befehl die Stellen t , für die die Funktionswerte $w(t)$ errechnet werden sollen. Beachte: Wenn wir 4s darstellen wollen, so sind das 40 Zehntelsekunden:

$$c1 = \text{seq}(t, t, 0, 40)$$

Nun geben wir für die Geschwindigkeit den Term als Spaltenkopf für $c2$ ein:

$$c2 = \text{seq}(3 * (t/10)^2 - 12 * (t/10) + 12, t, 0, 40)$$

und erhalten für $c1$ und $c2$ eine „Funktionswertetabelle“:

DATA	Zehntel.	Geschw.
	$c1$	$c2$
1	0.	12.
2	1.	10.83
3	2.	9.72
4	3.	8.67
5	4.	7.68
6	5.	6.75
7	6.	5.88

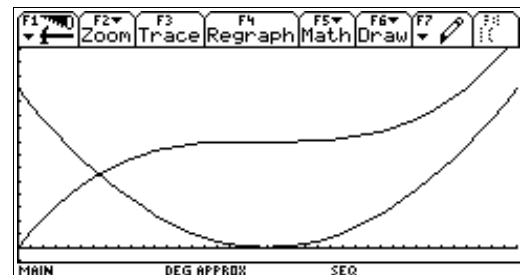
Mit Hilfe von [Plot Setup] definieren wir die Grafikausgabe: <F2>, <F1> führt ins Definitions Menü:

Plot Type..... xyline→
Mark..... Dot→
x..... c1
y..... c2

Die passenden Windows-Einstellungen:

nmin=0
nmax=40
plotStrt=1.
plotStep=1.
xmin=0.
xmax=40.
xsc1=1.
ymin=-1.
ymax=15.
ysc1=1.

Für die Ortsfunktion $s(t)$ ($s(t) = \int v(t) dt$) verfährt man für die Spalte $c3$ analog!
Damit erhält man Darstellung der Funktionsgraphen:

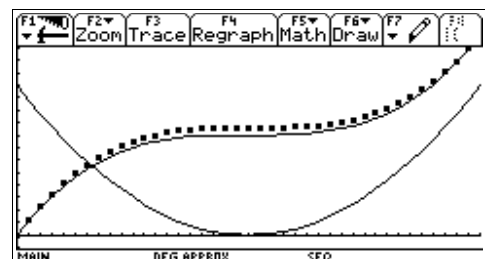


Erster Versuch: Im Funktionen-Editor definieren wir rekursiv eine Folge der Funktionswerte durch $u1(n) = u1(n-1) + w(n-1) \cdot \Delta t$ und setzen $\Delta t = 0.1s$ und $u1(0) = 0$ (Anfangsbedingung)

$$u1 = u1(n-1) + w(n-1) \cdot 0.1$$

$$u11 = 0$$

Die Darstellung dieser Folge zeigt:



Die Werte für die näherungsweise berechnete Ortsfunktion liegen zumindest im mittleren Bereich etwas zu hoch. Warum?

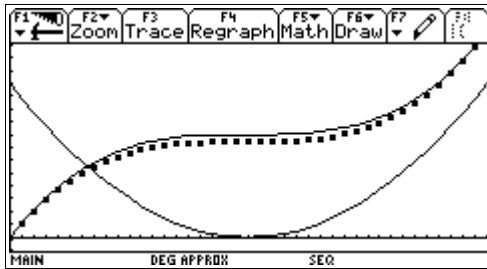
- Überlege:** Die Berechnung eines Ortswertes $u1(n)$ verwendet die Momentangeschwindigkeit $w(n-1)$ an der Stelle $n-1$.

Nächster Versuch:

$$u_2 = u_2(n-1) + w(n) \cdot \Delta t$$

$$u_2 = 0$$

Worin liegt der Unterschied²? Wir erhalten:



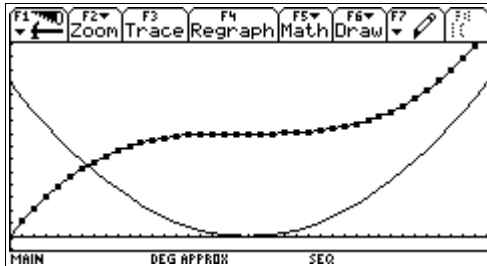
Jetzt liegen die Näherungswerte zu tief!

Letzter Versuch:

$$u_3 = u_3(n-1) + \frac{w(n-1) + w(n)}{2} \cdot \Delta t$$

$$u_3 = 0$$

Worin liegt der Unterschied³? Wir erhalten:



Jetzt passen die Näherungswerte sehr gut!

Für die Bestimmung des Funktionstermes für $s(t)$ verwenden wir die Funktion $v(t)$, Zeiteinheit 1s.

Die **rekursive Bestimmung** der obigen Ortsfunktionen lässt sich **als Summe** anschreiben:

$$s(t) \approx s(0) + \sum_{i=0}^{n-1} v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t$$

$$0 + \sum_{i=0}^{n-1} (v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t)$$

$$\frac{n \cdot (2 \cdot n^2 \cdot \Delta t^2 - 3 \cdot n \cdot \Delta t \cdot (\Delta t + 4) + \Delta t^2 + 12 \cdot \Delta t)}{2}$$

$$0 + \sum (v(i \cdot \Delta t) \cdot \Delta t, i, 0, n-1)$$

Da die Schrittweite Δt von der bis zur Zeit t ausgeführten n Schrittzahl abhängig ist ersetzen wir Δt :

$$n \cdot \Delta t = t \Rightarrow \Delta t = \frac{t}{n}$$

- 2 Jetzt wurde für $u_2(n)$ der Wert $w(n)$ verwendet.
- 3 Für $u_3(n)$ wird das arithmetische Mittel von $w(n)$ und $w(n-1)$ verwendet.

$$\frac{n \cdot (2 \cdot n^2 \cdot \Delta t^2 - 3 \cdot n \cdot \Delta t \cdot (\Delta t + 4) + \Delta t^2 + 12 \cdot \Delta t)}{2}$$

$$\frac{t \cdot ((2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) \cdot t^2 - 12 \cdot n \cdot (n-1) \cdot t + 2)}{2 \cdot n^2}$$

$$\text{ans(1)} \cdot \Delta t = t/n$$

Jedenfalls können wir die Genauigkeit der Näherungsrechnung dadurch erhöhen, wenn die Schrittweite Δt möglichst klein wird. Dies wird dadurch erreicht, dass die Schrittzahl n möglichst groß wird. Das riecht nach einem Grenzübergang

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t \cdot ((2 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1) \cdot t^2 - 12 \cdot n \cdot (n-1) \cdot t + 2)}{2 \cdot n^2} \right)$$

$$\text{limit}(\text{ans(1)}, n, \infty)$$

Wir multiplizieren noch aus ...

$$\text{expand}(t \cdot (t^2 - 6 \cdot t + 12))$$

$$\text{expand}(\text{ans(1)})$$

und vergleichen ...

$$\text{expand}(t \cdot (t^2 - 6 \cdot t + 12))$$

$$t^3 - 6 \cdot t^2 + 12 \cdot t$$

$$\int v(t) dt$$

$$\int (v(t), t)$$

Hey, das ist doch die durch Integralrechnung bestimmte $s(t)$ - Funktion !!!

Zusammenfassung:

Gegeben sei eine (stetige) Funktion $f(x)$. Von $f(x)$ sind ein „Anfangswert“ an der Stelle x_0 bekannt ($f(x_0)$) und die Änderungsrate in jedem x aus dem Definitionsbereich. Diese Änderung wird durch eine Funktion $r(x)$ beschrieben (momentane Änderungsrate).

Der Term der Funktion $f(x)$ kann näherungsweise berechnet werden durch:

$$f(x) \approx f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} r(x_0 + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

und durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ „exakt“ durch

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x r(x) dx$$

bestimmt werden!