Auf die Änderung kommt es an!

Einführungsbeispiel für die Differentialrechnung (nach Günter Schmidt)

(aus Entdecken, Verstehen, Anwenden – Analysisunterricht mit dem TI 92, Texas Instruments)

Ein Ballon steigt senkrecht bis auf 125 m Höhe über den Erdboden. Hier wird zum weiteren Steigen ein kleiner Sandsack abgeworfen.

a) Beschreibe mit deinen eigenen Worten die Fallbewegung des Sackes (nach der animierten Darstellung der Bewegung auf dem Voyage)

b) Aus einer Stroboskopaufnahme im Sekundentakt kann man für die ersten 5 Sekunden die jeweilige Höhe h des Sandsackes

ablesen: 125m ? 120m ? 105m ? 80m ? 45m ? 0m

Erstelle aus diesen Daten ein Weg-Zeitdiagramm (im Heft und am Rechner im Data-Matrix-Editor) und ermittle durch Probieren eine passende Funktionsgleichung s(t)

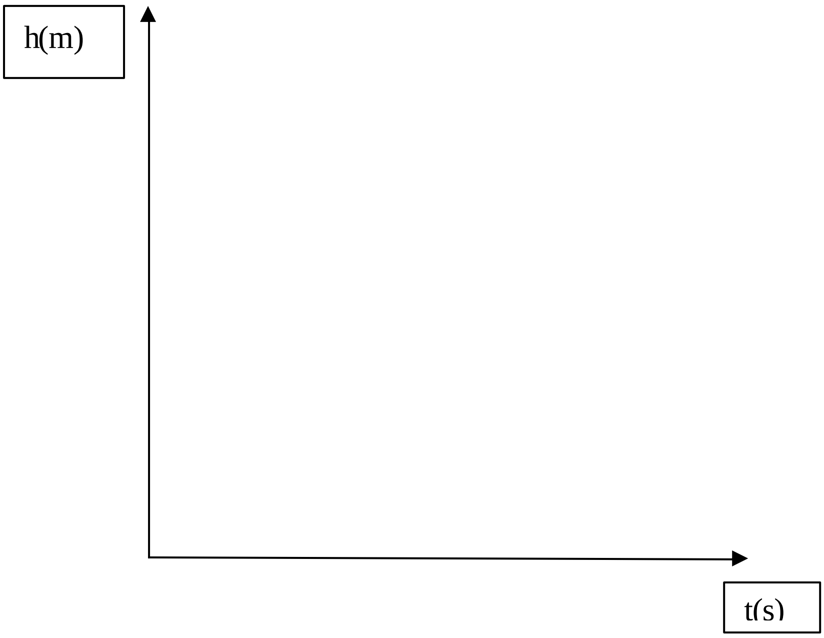
c) Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Sandsack auf der Erde auf? (Beginne mit der Berechnung einer mittleren Geschwindigkeit in den ersten 5 Sekunden, …………wie kannst du die Momentangeschwindigkeit in der 5. Sekunde nähern???)

d) Wie kann man die mittlere, wie die Momentangeschwindigkeit im Graphen s(t) erkennen???

e) Lässt sich auch ein Geschwindigkeits-Zeitdiagramm und die zugehörige Funktionsgleichung v(t) erstellen?

ad a) Wie verläuft die Fallbewegung?

ad b) Zeichne das Weg – Zeit: h(t) Diagramm



Welche Funktion passt zu den gezeichneten Punkten: ……………………………………………

Zum Zeichnen mit dem Voyage wählen wir den y= Editor und müssen die Funktion als y1(x) eingeben, d.h. der Zeitachse entspricht x, der Wegachse y.

Zu a) Wie man deutlich in der Animation erkennen kann, wird der Sandsack immer schneller, es liegt also eine **beschleunigte Bewegung** vor.

Zu b) Die Lage der Messpunkte (t/h(t)) bzw. (x/y) im Diagramm legt eine quadratische Funktion nahe – nach unten gekrümmt, die bei t = x = 0 mit h(0) = y(0) = 125 beginnt.
Erste Versuche mit y1(x) = 125 – x^2 zeigen, dass die Kurve stärker nach unten gekrümmt ist, ausprobieren verschiedener Werte liefert bald die richtige Lösung:
y1(x) = 125 – 5x^2 diese Funktion ist nun als y1(x) im Rechner gespeichert
[Mit h und t geschrieben: **h(t) = 125 – 5t^2** … bekannt (?) aus der Physik: freier Fall aus 125 m Höhe]

Zu c) Die Definition der (mittleren) Geschwindigkeit als Quotient aus Änderung des Weges durch dazu benötigte Zeit ist aus der Physik bekannt:

- **mittlere Geschwindigkeit:** $\bar{v} = \dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h(t_2)-h(t_1)}{t_2-t_1}$

geschrieben mit x (für die Zeit) und y (für den Weg): $\bar{v}\,(x_2,x_1) = \dfrac{y1(x_2)-y2(x_1)}{x_2-x_1}$

Als mittlere Geschwindigkeit für die gesamte Bewegung wird leicht ein Wert von - 25 m/s errechnet. Die verwendete Formel liefert auch die Steigung der Geraden (= Sekante) durch die Kurvenpunkte mit x_1 = 0 und x_2 = 5. Damit **sehen wir die mittlere Geschwindigkeit im Diagramm als Steigung der Sekante** durch die Kurvenpunkte zu t = 0 und t = 5.

- Möchte man der Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt t = 5 immer näher kommen, muss das Zeitintervall [t_2; t_1] mit t_2 = 5 – dem Aufschlagpunkt - immer kleiner gewählt werden.

Händisch werden die Geschwindigkeitswerte für die Zeitintervalle [1;5] , [2;5] , [3;5] , [4;5] berechnet. Dies ist aber noch immer nicht die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 5.

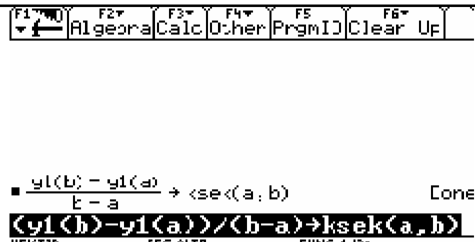
- Was passiert für das „Intervall [5;5]“ - (liegt hier überhaupt noch ein Intervall vor??)
- Dürfen wir auch Intervalle [4,5; 5] oder [4,9; 5] wählen?
- Die mittlere Geschwindigkeit entspricht der Steigung der zugehörigen Sekante im entsprechenden Intervall. Was passiert mit der Steigung der Sekante, wenn wir zur Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt t = 5 übergehen?

Wir sehen: Zur Berechnung der Momentangeschwindigkeit im Zeitpunkt t = 5 müssen wir das Zeitintervall immer kleiner, näher an t = 5 wählen. Der Rechenvorgang ist immer derselbe, die Zahlen immer „umständlicher“ und damit wesentlich einfacher mit dem Computer auszuführen:

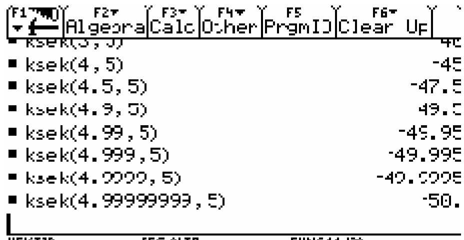
Wir definieren daher am Voyage eine Funktion

$$ksek(a,b) = \frac{y1(b)-y1(a)}{b-a}$$

„Sekantensteigungsfunktion im Intervall [a;b]“.



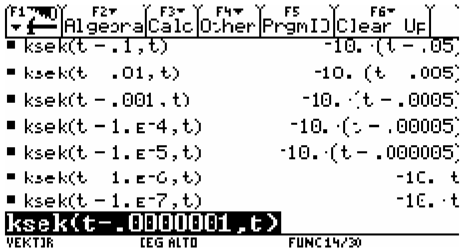
Damit können wir uns immer näher an den Zeitpunkt t = 5 herantasten: Die Ergebnisse nähern sich immer mehr dem Wert – 50. Wir schließen daraus: Der Sandsack prallt mit einer Geschwindigkeit von v = - 50 m/s auf.
Da mit dem Übergang von der mittleren Geschwindigkeit zur **Momentangeschwindigkeit** die Steigungen der zugehörigen Sekanten in die **Steigung der Tangente** übergeht, haben wir damit auch die Tangentensteigung für den Punkt (5/y1(5)) berechnet.



Wir können unsere Rechnung nun für jeden **beliebigen Zeitpunkt t** verallgemeinern:

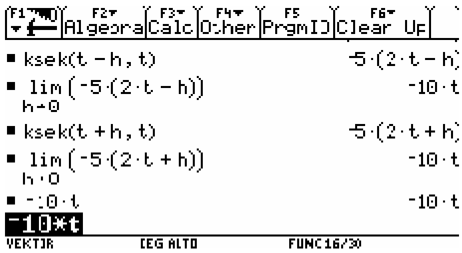
Wir nähern uns dem Zeitpunkt t von der linken Seite her immer mehr an:
[Probiere auch eine Annäherung an t von der rechten Seite. Wähle (t + …,t)]

Die erhaltenen Werte nähern sich immer mehr dem Wert - 10·t, damit gilt allgemein für die Momentangeschwindigkeit des Sandsackes zum Zeitpunkt t: v(t) = - 10·t



Die Momentangeschwindigkeit und damit die Tangentensteigung haben wir aus der mittleren Geschwindigkeit bzw. der Sekantensteigung errechnet, indem wir die Länge des Intervalles immer kleiner gewählt haben.

Diesen Prozess können wir mit einem Intervall der Länge h [t+h;t] oder [t-h;t] mit Hilfe des Grenzwertes wobei die Länge des Intervalles h gegen Null strebt (Befehl „limit“) noch weiter vereinfachen.



Was fehlt noch:
Verallgemeinerung der Begriffe Sekantensteigung zum **Diffenzenquotienten** und das Bilden des Grenzwertes des Differenzenquotienten wobei die Länge des Intervalles gegen Null strebt zum **Differentialquotienten**.

Durch Wahl beliebiger Funktionen y1(x) können die Schüler nun selbständig eigene Untersuchungen durchführen!