1. Wachstumsprozesse – dargestellt durch rekursive Modelle

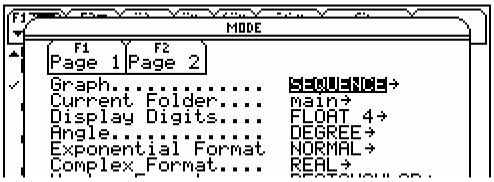
Beispiel 1.1 (Erwärmungsvorgang):
Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen. Zu Beginn hat es eine Temperatur von 5° C. Die Umgebung habe eine Temperatur von 20° C. Pro Minute nimmt die Temperatur um 30 Prozent der Differenz zwischen Umgebungstemperatur und Temperatur der Flüssigkeit zu.

- *Formuliere die rekursive Gleichung:*
  T_n *…. Temperatur nach n Minuten,* T_0 *… Temperatur zu Beginn* ($T_0 = 5$)
  $T_n = T_{n-1} + 0{,}3\,(20 - T_{n-1})$
- *Erstelle eine Tabelle, sowie die graphische Darstellung (Time) – Skizze und Window-Einstellungen*

Sequence – Darstellung für rekursive Folgen

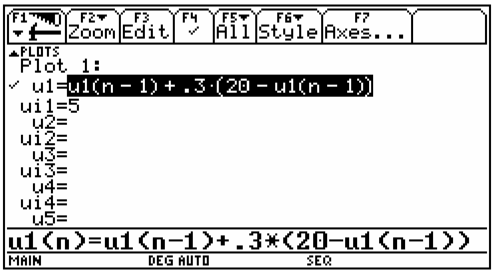
Umstellen auf den **Sequence – Modus**

Dialogfeld MODE
Wähle Graph-Modus SEQUENCE



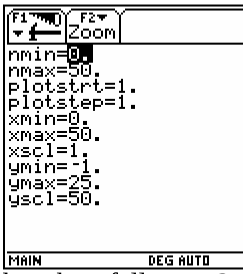
Eingabe der rekursiven Gleichung im Y= Editor

u1(n) .....1. rekursive Gleichung
ui1 ..... Startwert der 1. rekurs. Gleichung
u2(n) ..... 2. Rekursive Gleichung
ui2 ..... Startwert der 2. Rekurs.Gleichung
Bis zu u99(n) d.h. 99 verschiedene Gleichungen möglich.



Die rekursiv gegebene Folge kann sowohl **graphisch** als auch in **Tabelle** nform dargestellt werden:

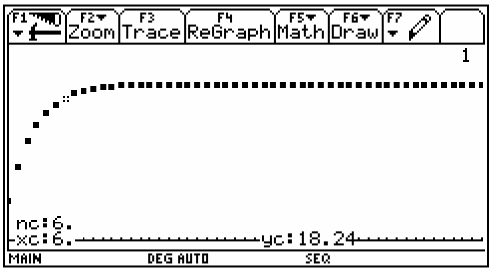
- **Graphik erstellen**: Window



n_{min}, n_{max} ....kleinster, größter zu berechnender u(n) Wert
Wahl von $n_{min} = 0$ bedeutet: Startwert ui wird für n=0 gesetzt. (n_{min} =1 ...Startwert für n = 1)
Plotstrt... Nummer des 1. Gliedes, das gezeichnet wird (**Plotstep**…weiteren Punkte)
x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max} ..... Grenzen des Ansichtsfensters

beachte: falls n_{min} ? x_{min} wird Folge zwar ab u(n_{min}) gerechnet, aber erst ab x_{min} gezeichnet

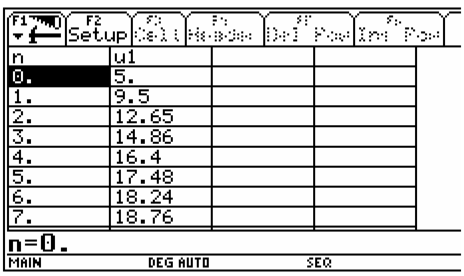
Time-Darstellung: (u(n),n)



Punktgraph, da n? N! (F3 Trace)
Auf der x-Achse sind die n-Werte (eigentlich t-Werte) zu sehen, auf der y-Achse die zu einem bestimmten n (Zeitpunkt) gehörigen Werte der Rekursionsgleichung

- **Tabelle erstellen**

Achtung: Tbl-Setup
TblStart und n_{min} (Window) auf selben Wert stellen
(d.h. n = 0 wählen, falls n_{min} auf 0,
n = 1 wählen, falls n_{min} auf 1)
falls n_{min} = 1 eingestellt, wird der Startwert ui für n = 1 genommen, wählt man in der Tabelle TblStart = 0 gibt es somit keinen Wert für die Tabelle – undef.)



n	u1
0.	5.
1.	9.5
2.	12.65
3.	14.86
4.	16.4
5.	17.48
6.	18.24
7.	18.76

n=0.

- *Wann wird T > 15°C, wann T > 19°C, wann T>19,99°C.*
- *Wann ist T = 20°C bei Genauigkeit von 2 Nachkommastellen.*
- *Wie groß ist die Temperaturzuwachs von 2.auf 3. Minute, von 8. auf 9. Minute, von 15. auf 16. Minute. Um wieviel Prozent des jeweiligen Ausgangswertes ändert sich die Temperatur?*

Allgemein: **Rückkopplungsprozesse = iterative Prozesse**

Siehe voriges Beispiel 1.1: G … Grenzwert, k … Wachstumsfaktor

Eingabe: x_0 ? $x_n = x_{n-1} + k\,(G - x_{n-1})$? Ausgabe: x_1

x_1 x_2

… **auswerten** **…**

$\mathbf{x_{n-1}}$ **?** $\mathbf{x_n}$

Beispiel 1.2: (Szirucsek 892):
*Ein Gegenstand hat im Kühlschrank eine Temperatur von 6°C. Er wird in eine Umgebung von 20°C gebracht. Sein Temperatur**zuwachs** pro Minute beträgt 25 % des Unterschiedes zwischen der Grenztemperatur und seiner Temperatur am Beginn dieser Minute.*
Löse dieselben Fragen wie in Bsp. 1.1

Beispiel 1.3: (Szirucsek 896 - Abkühlvorgang):
Ein Gegenstand mit 25°C wird in einen Kühlschrank mit 5°C gebracht. Seine Temperaturabnahme pro Minute beträgt 25 % des Unterschiedes zwischen seiner Temperatur am Beginn dieser Minute und der Grenztemperatur.

- *Formuliere die rekursive Gleichung für diese begrenzte **Abnahme***
- *Erstelle eine Tabelle, sowie die graphische Darstellung (Time) – Skizze + Windoweinstellungen*
- *Wann wird T < 10°C, wann T < 6°C, wann T < 5,01°C.*
- *Wann ist T = 5°C bei Genauigkeit von 2 Nachkommastellen.*
- *Wie groß ist die Temperaturabnahme von 2.auf 3. Minute, von 8. auf 9. Minute, von 15. auf 16. Minute. Um wie viel Prozent des jeweiligen Ausgangswertes ändert sich die Temperatur?*

***Beispiel 1.4:** (Szirucsek 890)*
In einer Stadt mit 40 000 Einwohnern breitet sich ein Gerücht aus. Zu einem bestimmten Zeitpunkt (Beginn unserer Rechnung) ist dieses Gerücht schon 20 000 Einwohnern bekannt. Von jetzt an erfahren davon stündlich 60 % jener, die das Gerücht noch nicht kennen.

- *Formuliere die rekursive Gleichung für diese begrenzte Zunahme*
- *Erstelle eine Tabelle, sowie die graphische Darstellung (Time) – Skizze + Windoweinstellungen*
- *Wann wissen mehr als 35000 Einwohner das Gerücht, wann mehr als 39 990?*
- *Zunahme der Wissenden von der 3. auf 4. Stunde, bzw. von 10. auf 11. Stunde.*
- *Wann wissen es alle Einwohner?*

Beispiel 1.5: (Szirucsek 895)
Herr Groß muss wegen einer chronischen Erkrankung täglich 2,5 mg eines bestimmten Medikaments zu sich nehmen. Sein Körper scheidet täglich 40 % der gerade (am Beginn dieses Tages) im Körper vorhandenen Menge des Medikamentes aus. Zu Beginn sei im Körper dieses Medikament nicht vorhanden.

- *Formuliere die rekursive Gleichung für die tägliche Menge an Medikament im Körper*
- *Erstelle eine Tabelle für die ersten 20 Tage (protokolliere nur jeden 5. Tag), sowie die graphische Darstellung (Time) – Skizze + Windoweinstellungen*
- *Steigt die Medikamentenmenge beliebig weit an, oder gibt es einen Grenzwert (wie groß ist dieser auf 2 Kommastellen genau)?*

Beispiel 1.6
Ein Raucher führt seinem Blut eine tägliche Nikotinmenge von 0,02 mg zu. Andererseits wird täglich 1 % des im Blut vorhandenen Nikotins abgebaut. Zu Beginn sei im Blut kein Nikotingehalt enthalten. 1 mg Nikotin im Blut ist ein sehr gefährlicher Schwellenwert. Wird bei diesem Rauchverhalten dieser Wert jemals erreicht oder überstiegen, wann? Gibt es einen „Grenzwert“ bei dem ebensoviel abgebaut wie zugeführt wird?

***Beispiel 1.7:** Ein kleiner Wald besteht aus 4000 Bäumen. Jedes Jahr werden 20 % der Bäume gefällt und sodann 1000 neue Bäume gepflanzt.*

- *Gib eine rekursive Darstellung für die Anzahl der Bäume am Ende jeden Jahres an.*
- *Wird die Anzahl der Bäume immer größer, immer kleiner oder gib es einen Grenzwert. Dokumentiere deine Vorgangsweise (Tabelle, Graph,.....) und begründe damit deine Antwort.*

***Beispiel 1.8**: Der jährliche Zuwachs der Holzmenge eines Waldes von 10 000 m^3 beträgt 2,56%, die jährliche Schlägerungsrate 500 m^3. Der Förster behauptet, dass bei diesem Schlägerungsverhalten der Wald nicht länger als 30 Jahre steht. Kann das stimmen? (Begründe mittels Graphik, Daten - Tabelle,...)*

2. Lineares und Exponentielles Wachstum im Vergleich

Bsp 2.1 *a: Ein Produkt von € 1000.— wird jährlich um € 50.— teurer. Betrachte die Preisentwicklung.*
b: Ein Produkt von € 1000.— wird jährlich um 5 % teurer. Betrachte die Preisentwicklung

- *Erstelle die rekursiven und die expliziten Gleichungen für den jährlichen Preis.*
- *Tabelle und graphische Darstellung (Skizze + Window) für die ersten 12 Jahre für beide Modelle.*

Betrachten wir nun die **mittlere absolute Änderungsrate (Preisänderung/Zeitdifferenz)** und die **mittlere relative (prozentuelle) Änderungsrate (mittlere absolute Änderung/Bezugswert)** für beide Modelle:

		Jährliche Teuerung 50,00 Änderung			**Jährliche Teuerung 5 % Änderung**	
Jahr	Preis	**Absolut**	**Relativ**	Preis	**absolut**	**relativ**
0	1000,00			1000,00		
1	1050,00	+50,00	0,0500 (5%)	1050,00	+50,00	0,0500 (5%)
2	1100,00	+50,00	0,0476 (4,76%)	1102,50	+52,50	0,0500 (5%)
3	1150,00	+50,00	0,0455 (4,55%)	1157,63	+55,13	0,0500
4	1200,00	+50,00	0,0435 (4,35%)	1215,51	+57,88	0,0500
5	1250,00	+50,00	0,0417	1276,28	+60,78	0,0500
6	1300,00	+50,00	0,0400	1340,10	+63,81	0,0500
7	1350,00	+50,00	0,0385	1407,10	+67,00	0,0500
...	......	....	......	....	....	....

Wir erkennen:

- **Die mittlere absolute Änderungsrate ist beim linearen Wachstum konstant, sie nimmt beim exponentiellen Wachstum zu.**
- **Die mittlere relative Änderungsrate nimmt beim linearen Wachstum ab, sie ist beim exponentiellen Wachstum konstant.**

Lineares Wachstum: Wachstum um einen konstanten Betrag k: $\mathbf{u(n) = u(n-1) + k}$
In der x-fachen Zeit Wachstum um den x-fachen Betrag $x\cdot k$ $\mathbf{y(x) = y(0) + x\cdot k}$

Exponentielles Wachstum: Wachstum mit konst.Faktor: $\mathbf{u(n) = u(n-1)+r\cdot u(n-1)}$ **?** $\mathbf{u(n) = u(n-1)\cdot(1+r)}$
Wachstumsfaktor: (1+r), zur x-fachen Zeit gehört der Wachstumsfaktor $(1+r)^x$: $\mathbf{y(x) = y(0)\cdot(1+r)^x}$

Beispiele:
A: *Das Anfangsgehalt (n= 0) zweier Angestellter betrug € 24 000.— pro Jahr. Ab heuer (n=1) wird es beim Angestellten A jährlich um 1 000.— erhöht, bei B erfolgt eine jährliche Erhöhung um 3 %.*
Berechne für A und B (gerechnet ab heuer):

- *Wie hoch ist der Verdienst im 7. Dienstjahr*
- *Wie groß ist der mittlere Verdienstzuwachs in den ersten 10 Jahren?*
- *Wie groß ist der mittlere prozentuelle Verdienstzuwachs in den ersten 10 Jahren?*
- *Wie groß ist der durchschnittliche Verdienstzuwachs vom 11. bis zum 18. Dienstjahr?*
- *Wie groß ist der mittlere prozentuelle Verdienstzuwachs vom 11. bis zum 18. Dienstjahr?*

B: *Du zahlst zu Jahresbeginn € 50 000.—auf ein Sparbuch und erhälst am Ende jedes Jahres 3 % Zinsen.*

- *Mit welchem Wachstumsmodell lässt sich die Kapitalentwicklung beschreiben?*
- *Betrachte die Kapitalentwicklung und skizziere den Graphen für die ersten 10 Jahre*
- *Wieviel besitzt du zu Beginn des 8. Jahres, wann bist du Millionär?*

C: *Eine Firma bietet Herrn Mayer folgende 2 Varianten eines monatlichen Gehaltsschemas an:*
Variante A: ausgehend von einem Grundgehalt (n=0) von 15 614.-- Erhöhung um 1000.—pro Jahr
Variante B: ausgehend von einem Grundgehalt (n=0) von 15 614.-- jährliche Erhöhung um 5,5 %

- *Vergleiche die Entwicklung des monatlichen Gehalts für die nächsten 10 Jahre.*

Für welches Schema soll sich Herr Mayer entscheiden. (Protokolliere im Heft deine Vorgangsweise, Tabelle und Graphik, und deine Begründung)

- *Wie groß ist der mittlere Gehaltszuwachs in den ersten 5 Jahren?*
- *Wie groß ist der mittlere prozentuelle Gehaltszuwachs in den ersten 5 Jahren?*
- *Wie groß ist der mittlere Gehaltszuwachs vom 5. bis zum 10. Dienstjahr?*
- *Wie groß ist der mittlere prozentuelle Gehaltszuwachs vom 5. bis zum 10. Dienstjahr*

3. Wachstum mit oberer Grenze (Kapazität, Sättigung)

Lineares und exponentielles Wachstum beschreiben unbegrenztes Wachstum. Bei praktischen Anwendungen gibt es aber meist Obergrenzen, die nicht überschritten werden können (Kapazität, Sättigungsgrenze):

- Wachstum bei beschränktem Lebensraum oder beschränktem Nahrungsangebot
- Ausbreitung von Epidemien, Abbau von Rohstoffen, Steigerung von Verkaufszahlen durch Werbung, Abkühlprozesse (siehe Einführungsbeispiele!!!), ...

Bei diesen Beispielen ist häufig zu Beginn exponentielles Wachstum zu erkennen, dann beginnt sich der Anstieg aber immer mehr zu vermindern und läuft schließlich flach gegen die Kapazitätsgrenze aus.

Bei den Erwärmungsprozessen ist dieses begrenzte Wachstum z.B.: dadurch gegeben, dass der Zuwachs abhängig ist von der Differenz der Grenztemperatur (Sättigung) und der derzeitigen Temperatur.

Allgemeiner Ansatz für begrenztes Wachstum: $u(n) = u(n-1) + k \cdot \left(G - u(n-1)\right)$
Dabei ist: G ...Sättigungsgrenze, G – u(n-1) ....Freiraum, die vom Wachstum noch nicht erfassten, (Grenze – aktueller Wert), k(G – u(n-1)) ein bestimmter Bruchteil des Freiraums

Bei vielen Vorgängen ist eine mögliche Begrenzung des Wachstums auch dadurch gegeben, daß z.B. ein Waldbestand durch jährliche Schlägerung wieder dezimiert wird, eine bestimmte Medikamentenmenge aus dem Körper wieder ausgeschieden wird, ...
Nur wenn Zuwachs und „Abbau“ pro Zeiteinheit gleich groß sind, ist ein konstanter Grenzwert erreicht. (Sonst unbegrenztes Wachstum, oder „Aussterben“)
Siehe Beispiele: 1.1 – 1.8 aus Einführungsteil

Bei vielen begrenzten Wachstumsprozessen ist nicht nur der Freiraum, sondern das Verhältnis von Freiraum zur Gesamtpopulation als Korrekturfaktor für das Wachstum ausschlaggebend. Man spricht dann von (diskretem) logistischem Wachstum.

Allgemeiner Ansatz für (diskretes) logistisches Wachstum:

$$u(n) = u(n-1) + k \cdot \frac{u(n-1)}{G} \cdot \left(G - u(n-1)\right)$$

k ... beschreibt Wachstumsgeschwindigkeit, G ... Sättigungsgrenze
Wachstum um einen Wert, der proportional zum aktuellen Wert und zum Freiraum ist

Beispiel 3.1:
Eine Algenart bedeckt anfangs 2 m^2 eines 2000m^2 großen Teiches. Nach 12 Stunden sind etwa 475 m^2 des Teiches von Algen bedeckt. Wann sind weniger als 10 % des Teiches frei von Algen. Experimentiere mit logistischem Wachstum mit Wachstumsraten zwischen 0,4 und 0,8.

HÜ – **Beispiel 3.2:**
In einem Fischteich können maximal 5000 Fische leben. Als Anfangsbestand wurden 200 Exemplare eingesetzt. Die monatliche Wachstumsrate beträgt 0,4. In welchem Monat ist der Zuwachs am größten. Verwende logistisches Wachstum.

HÜ **– Beispiel 3.3:**
Experimentiere mit logistischem Wachstum, wähle als Startwert 20, als Sättigungsgrenze 500 und setze für k folgende Werte ein: $k_1 = 0{,}9$ $k_2 = 1{,}5$ $k_3 = 1{,}9$ $k_4 = 2$ $k_5 = 2{,}5$ $k_6 = 2{,}8$ Beschreibe und skizziere jeweils den Graphen.

Name: ....

Finde zu jedem Beispiel die rekursive Gleichung:
Gib bei jedem Beispiel an, was u(n) darstellt und welche Größe durch n beschrieben wird.

1. Jemand zahlt zu Beginn des Jahres 50 000.—auf ein Sparbuch ein und erhält am Ende jedes Jahres 3 % Zinsen. Beschreibe die Kapitalentwicklung

Gleichung:

u(n) .... n............

2. Eine Polarstation am Südpol hat einen Vorrat an Dieselöl von 10000 Liter. Der durchschnittliche monatliche Verbrauch beträgt 975 l.
Gib eine geeignete rekursive Gleichung zur Beschreibung des monatlichen Ölvorrates an

Gleichung: ....

u(n) .... n............

3. Ein Getränk wird aus dem Kühlschrank genommen. Zu Beginn hat es eine Temperatur von 5° C. Die Umgebung habe eine Temperatur von 20° C. Pro Minute nimmt die Temperatur um 30 Prozent der Differenz zwischen Umgebungstemperatur und Temperatur der Flüssigkeit zu.
Beschreibe die Temperaturentwicklung

Gleichung:...........

U(n)......... n............

Finde zu jedem Beispiel die rekursive Gleichung: Name:
Gib bei jedem Beispiel an, was u(n) darstellt und welche Größe durch n beschrieben wird.

1. Susi hat ein Sparschwein mit 500.— geschenkt bekommen. Sie spart jede Woche 20.—und legt sie dazu. Beschreibe die Kapitalentwicklung

Gleichung:

u(n) .... n............

2. Ein Kapital von 200 000.-- wächst in einem Jahr durch Verzinsung um 5,5 % Gib eine geeignete rekursive Gleichung zur Beschreibung der Kapitalentwicklung für die nächsten Jahre an.

Gleichung: ....

u(n) ...... n............

3. Ein Gegenstand mit 25°C wird in einen Kühlschrank mit 5°C gebracht. Seine Temperaturabnahme pro Minute beträgt 25 % des Unterschiedes zwischen seiner Temperatur am Beginn dieser Minute und der Grenztemperatur
Beschreibe die Temperaturentwicklung

Gleichung:...........

u(n)......... n............