

Projekt: Anwendung der Differentialrechnung in der Wirtschaftsmathematik: Kosten- und Preistheorie

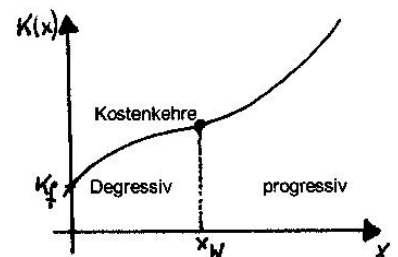
1. Kostenfunktion

Die **Gesamtkosten** $K(x)$ setzen sich aus den **Fixkosten** K_f (unabhängig von der Produktionsmenge x) und den **variablen Kosten** $K_v(x)$ (abhängig von der Produktionsmenge x) zusammen:

$$K(x) = K_f + K_v(x)$$

In der Praxis ergibt die Datenaufnahme über die Gesamtkosten oft einen „S“-förmigen Verlauf. Die Kostenfunktion entspricht dabei einer Gleichung dritten Grades: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und zeigt den nebenstehend abgebildeten Verlauf:

Die Kosten wachsen natürlich mit steigender Produktionszahl x , bei kleinen Produktionsmengen wachsen die Kosten langsamer – **degressiv**, bei höheren Produktionsmengen aber wieder schneller – **progressiv**; der Übergang von degressiv zu progressiv wird **Kostenkehre** genannt.



Die momentane Änderungsrate der Gesamtkosten bei einer Vergrößerung der Stückzahl um eine Mengeneinheit wird durch den Anstieg der Kostenkurve – somit die erste Ableitung, die Grenzkostenfunktion $K'(x)$ an einer bestimmten Stelle x ausgedrückt. Die Änderung des Kostenanstieges von degressiv zu progressiv wird mathematisch durch Änderung des Krümmungsverhaltens, den Wendepunkt definiert.

An der **Kostenkehre** gilt daher: $K''(x) = 0$

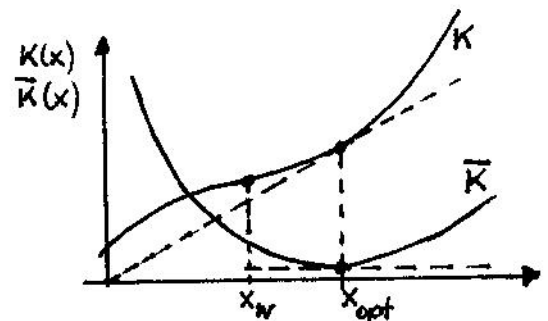
• Stückkostenfunktion und Betriebsoptimum

Die Gesamtkosten müssen über den Verkauf von x Stück hereingebracht werden. Um einen vernünftigen Preis festlegen zu können, interessiert man sich für die Kosten pro Stück, d.h. die sogenannte

$$\text{Stückkostenfunktion } \bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$$

Als **Betriebsoptimum** wird jene Produktionsmenge x_{opt} bezeichnet, bei der die Stückkosten am geringsten sind. Dies entspricht dem **Minimum der Stückkostenfunktion**.

$$(\bar{K}(x))' = 0 \Rightarrow x_{opt} \dots \text{Betriebsoptimum}$$



Beispiel A: Für einen Betrieb wurde die Kostenfunktion $K(x) = 0,1x^3 - 1,12x^2 + 4,4x + 5,2$ ermittelt. Berechne die Kostenkehre, stelle die Gleichung der Stückkostenfunktion auf, berechne das Betriebsoptimum und die zugehörigen Stückkosten. Zeichne die Graphen der Kosten- und der Stückkostenfunktion. Gib die Windoweinstellungen an und zeichne alle berechneten Werte ein. ($x \sim 3,73$ ME; $x \sim 6,3$ ME; Stückkosten: $\sim 2,1$ GE/ME)

Der Wert der Stückkosten im Betriebsoptimum $\bar{K}(x_{opt})$ legt den kleinstmöglichen Preis für die Ware fest, der langfristig gerade noch alle Kosten (variable und fixe Kosten) abdeckt. Den Betrieb bezeichnet man daher als **Grenzbetrieb und den Preis** $p_0 = \bar{K}(x_{opt})$ **als langfristigen Mindestverkaufspreis**

(Für jeden geringeren Verkaufspreis, wie auch jede andere Absatzmenge kann der Betrieb nicht mehr kostendeckend arbeiten.)

Beispiel B: Für welche Produktionsmenge und welchen Verkaufspreis wird ein Betrieb mit der Kostenfunktion $K(x) = 0,1x^3 - x^2 + 4x + 5$ zum Grenzbetrieb. Vergleiche Stückkosten und Verkaufspreis sowie Gesamtkosten und Erlös an dieser Stelle. Zeige graphisch, daß die Tangente an die Kostenfunktion im Betriebsoptimum durch den Ursprung verläuft. ($x \sim 5,8$ ME, Preis $\sim 2,43$ GE/ME, $E(x) = K(x) = 14,1$ GE)

• Variable Stückkosten und Betriebsminimum

Lässt man die Fixkosten außer Acht, so haben nur mehr von der Stückzahl abhängige Größen Einfluss auf die Kosten. Man dividiert daher nur die variablen Kosten durch die Stückzahl:

Variable Stückkosten $\overline{K_V}(x) = \frac{K_V(x)}{x}$	$(\overline{K_V}(x))' = 0 \Rightarrow x_m \dots \dots \text{Betriebsminimum}$
---	---

Aus den variablen Kosten lässt sich das **Betriebsminimum**, jene Produktionsmenge x_m ermitteln, bei der die variablen Stückkosten minimal sind. Dies entspricht dem **Minimum der variablen Stückkosten**.

Ermittelt man die Stückkosten im Betriebsminimum $\overline{K_V}(x_m)$, so haben wir eine Preisgrenze, die kurzfristig zumindest die Abdeckung der variablen Kosten sichert. Das Betriebsminimum bestimmt somit die

kurzfristige Preisgrenze: $p_m = \overline{K_V}(x_m) \dots \dots \text{kurzfristiger Mindestverkaufspreis}$

Beispiel C: Ein Betrieb habe die Kostenfunktion $K(x) = 0,1x^3 - x^2 + 4x + 5$. Für welchen Verkaufspreis und welche Absatzmenge können gerade noch die variablen Kosten gedeckt werden?
(Betriebsminimum: $x = 5$ ME, Verkaufspreis $p = 1,5$ GE pro ME – bei Absatz von genau 5 ME)

2. Preisfunktion (siehe auch 5. Klasse: lineare Modelle auf dem Gebiet der Wirtschaftsmathematik)

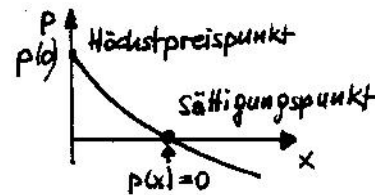
Der Preis ist entweder konstant (p) oder variabel als $p(x)$ anzusetzen. Wird ein variabler Preis angenommen, d.h. der Preis ist abhängig von der Nachfrage x , so ergeben sich zwei theoretische Werte:

Höchstpreis $p(0) \dots$ bei diesem Preis würde nichts ($x = 0$) abgesetzt und

Sättigungspunkt $p(x) = 0$. bei dieser Absatzmenge würde Preis von Null GE erzielt.

($x(p)$.. Nachfragefunktion)

Geht man von einem vom Markt abhängigen Preis aus, so sinkt mit steigendem Angebot der Preis. Entsprechend ist der Funktionsverlauf von $p(x)$ monoton fallend.



3. Erlösfunktion und Gewinnfunktion

Der Erlös $E(x)$ ist definitionsgemäß durch das Produkt von Preis und Stückzahl gegeben.

$E(x) = p \cdot x$ oder $E(x) = p(x) \cdot x \dots \dots \text{Erlösfunktion}$
--

Aus dem Erlös muss die Firma ihre Kosten decken, bevor sie den Gewinn $G(x)$ berechnen kann:

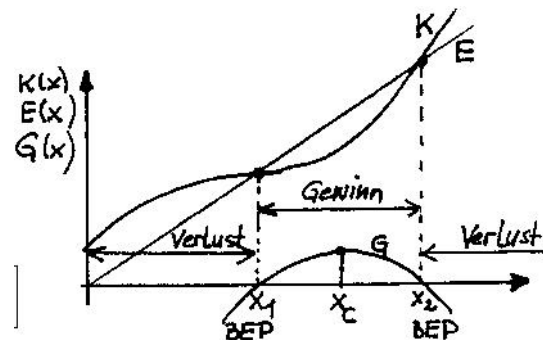
$G(x) = E(x) - K(x) \dots \dots \text{Gewinnfunktion}$
--

$\Rightarrow$ Ist $E(x) < K(x)$ und somit $G(x) < 0$ macht die Firma Verlust

$\Rightarrow$ Ist $E(x) > K(x)$ und somit $G(x) > 0$ macht die Firma Gewinn*
(*Rohgewinn, d.h. die Steuern sind noch nicht berücksichtigt).

Die Nullstellen der Gewinnfunktion heißen **Gewinnschwellen**.
Man nennt sie auch **Break even points BEP**, hier gilt: $E(x) = K(x)$

Die momentanen Änderungsraten $E'(x)$ bzw. $G'(x)$ werden **Grenzerlös** bzw. **Grenzwinn** bezeichnet.



4. Maxima bei Gewinn- und Erlösfunktion – Cournot'scher Punkt

Für jedes Unternehmen stellt sich die Frage: Wieviel soll ich zu welchem Preis verkaufen, damit der Unternehmensgewinn maximal wird. Diese Frage lässt sich mit Hilfe der Differentialrechnung beantworten: Jener Punkt auf der Preisfunktion, bei dem der Gewinn maximal ist wird als Cournotscher Punkt bezeichnet.

$\Rightarrow$ Cournot'scher Punkt (x_c/p_c) mit:	
$x_c \dots \dots \text{Stückzahl bei maximalem Gewinn:}$	$G'(x) = 0$ [bzw. $E'(x) = K'(x)] \Rightarrow x_c$
$p_c \dots \dots \text{Preis bei } x_c$	$p_c = p(x_c)$

Gibt es mehrere Maxima, so spricht man von Cournotscher Menge.

Beachte, dass der maximale Gewinn (im allgemeinen) nicht bei jener Stückzahl auftritt, wo der maximale Erlös (Umsatz) gemacht wird, und (im allgemeinen) auch nicht dort liegt, wo die Stückkosten minimal sind.

Beispiel D: Für den Stückpreis einer Ware gilt: $p(x) = 360 - 1,5x$.

- Ermittle die Erlösfunktion, den Grenzerlös beim Verkaufspreis von 100 bzw. 130 Stück (+ Bedeutung), wann wäre der Erlös gleich Null, wann maximal, skizziere $E(x)$.
- Die zugehörige Kostenfunktion lautet: $K(x) = 5000 + 120x$. Ermittle die BEP (+Bedeutung, welche ganzzahligen Werte müssen genommen werden), die gewinnmaximale Absatzmenge und zeichne $K(x)$ und $G(x)$ in die Zeichnung ein.
Gibt es ein Betriebsoptimum? (Begründe!)

$(360x - 1,5x^2; 360 - 3x; \text{ Erlös steigt bei Verkauf eines weiteren Stücks um 60 bzw. sinkt um 30 GE; } 0 \text{ bzw. } 240; 120.$
Gewinnschwelle: 25 Gewinngrenze: 125 (nicht 126!!) Stück; 80; kein Betriebsoptimum bei einer lin. Kostenfkt.)

Übungsbeispiele:

- Die variablen Stückkosten eines Produktes lassen sich näherungsweise durch die Funktion $\overline{K_v}(x) = 0,02x^2 - 0,3x + 1,5$ berechnen. Die Fixkosten betragen 2 GE. Bestimme die Gleichung der Gesamtkostenfunktion und der Stückkostenfunktion, sowie die langfristige und die kurzfristige Preisuntergrenze. Ermittle ebenso die Kostenkehre und gib in welchem Bereich die Kosten degressiv und wo sie progressiv verlaufen und zeige jeweils an einem Bsp. was dies bedeutet.

- Durch eine Untersuchung wurden in einem Erzeugungsbetrieb folgende Wertepaare für die Gesamtkosten ermittelt:

X(ME)	2	3	4	5	6
K(x) (GE)	44	48	60	80	120

Ermittle mittels Regression eine Gleichung einer Kostenfunktion 3. Grades durch diese Wertepaare. Bestimme das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum sowie die zugehörigen Preisuntergrenzen. Überprüfe die Ergebnisse anhand einer genauen ! Zeichnung (entnimm Wertepaare mittels F3 Trace). Für welche Produktionsmenge ist die Zunahme der Kosten am geringsten?

- Von einem Monopolbetrieb kennt man die Gleichung der Gewinnfunktion: $G(x) = -0,1x^3 + 2x^2 + 4x - 120$; die lineare Nachfrage(Preis)funktion erreicht einen Höchstpreis $p(0) = 50$ GE/ME, die Sättigungsmenge weist $50/3$ ME auf. Ermittle Gleichungen der Kostenfunktion, Erlösfunktion, die Gewinnschwellen, sowie die Daten des Cournot'schen Punktes. Wie groß ist der max. Gewinn? Genaue Zeichnung!
- Für die Herstellung eines Produktes entstehen einem Betrieb Fixkosten in der Höhe von 1000 GE. Die variablen Kosten lassen sich angenähert durch die Gleichung $K_v(x) = x^3 - 25x^2 + 250x$ beschreiben. Der mengenmäßige Umsatz x ändert sich mit dem Preis p nach der Gleichung $x = \sqrt{500 - p}$.
 - Ermittle die Gleichungen für Gesamtkosten, Erlös und Gewinn und berechne die BEP und die Daten des Cournot'schen Punktes. (Zeichnung, window angeben!)
 - Ermittle das Betriebsoptimum und das Betriebsminimum.
- Der Betriebsbuchführung eines Betriebes kann man entnehmen, daß bei einer Ausbringung von 0; 20; 60; 100 ME Gesamtkosten in der Höhe von 1000; 1544; 2248; 5000 GE anfallen. Das erzeugte Produkt wird um $p = 50$ GE/ME verkauft.
 - bestimme den Kostenverlauf durch eine Funktion 3. Grades, ermittle die Gewinnschwellen und den maximalen Gewinn. Stelle alle Funktionen und berechneten Werte graphisch dar.
 - Bestimme die langfristige und die kurzfristige Preisuntergrenze
- Berechne für eine Kostenfunktion $K(x) = 0,05x^3 - 3x^2 + 100x + 1000$ und einen Marktpreis $p = 100$ die Gewinnschwellen und den maximalen Gewinn.
 - Bestimme für die Kostenfunktion $K(x) = x^3 - 30x^2 + 300x + 1000$ und die Nachfragefunktion $x = 500 - p$ die BEP und die Daten des Cournot'schen Punktes.
- Von einem Monopolbetrieb kennt man die Gewinnfunktion $G(x) = -2x^3 + 20x^2 + 200x - 800$. Die Sättigungsmenge der linearen Nachfragefunktion beträgt 20 ME, der Höchstpreis $p(0) = 400$ GE/ME. Ermittle das Betriebsoptimum, die Gewinnschwellen, den maximalen Gewinn und den maximalen Erlös. Überprüfe Gewinn und Erlös anhand einer Zeichnung!